PIE

coi migliori saluti
M. P.

Opusc. PA-I-764.

48119/764

BIBLIOTECA DELLE FACOLTA' DI LETTERE E FILOSOFIA
TORINO

82916

Dal Bollettino dell' Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania—Fascicolo 2°, Serie 2ª—Gennaio 1908.

M. PIERI—SOPRA GLI ASSIOMI ARITMETICI.

§ 1. È cosa ormai stabilita che l' Aritmetica si può istituire deduttivamente sulle nozioni primitive di '*numero*' (intero, positivo o nullo) e '*susseguente* d' un numero', mercè di quattro proposizioni primitive (assiomi o postulati), che nel loro insieme forniscono appunto una definizione 'reale' od 'implicita' del numero intero assoluto. Esse sono (*):

Noz. prim.
numero
susseguente
Prop. prim.

α) Il susseguente di un numero è un numero.

β) Due numeri, che abbian per susseguente un medesimo numero, sono uguali fra loro.

γ) Esiste almeno un numero, che non sussegue alcun numero.

δ) Se una classe (di numeri) contiene un numero non susseguente di alcun numero, e se il susseguente di ciascun numero della classe appartiene alla classe; allora ogni numero appartiene alla classe. (Principio d'*induzione completa*).

Dalle premesse α) e δ) deriva poi senza indugio il teorema:

Teorema

e) « Due numeri, nessuno dei quali sia susseguente ad un numero, son sempre uguali fra loro (**) », Onde la definizione:

f) « Si dà il nome di *zero* ('0') a quel numero — determinato ed unico, grazie alle γ) ed *e)* — che non è susseguente di un numero ». Per la qual cosa il principio δ) viene a dire in sostanza che:

« Se una proposizione è vera per lo zero; e se, con l' am-

(*) R. DEDEKIND, '*Was sind und was sollen die Zahlen ?*' (Braunschweig, 1888), § 71.

G. PEANO '*Arithmetices principia*' (Torino. 1889), pag. 1; e '*Sul concetto di numero*', in Riv.ª di Matem.ª, vol. I. (1891), pag. 90.

A. PADOA, '*Théorie des nombres entiers absolus*, in Revue de Mathématiques, v. VIII (1902), pag. 48. Il sistema α),... δ) è quello proposto da A. PADOA (ivi).

(**) A. PADOA, loc. cit., pag. 50.

metter ch' essa abbia luogo per un numero n, si può dimostrare, qualunque sia n, che deve sussistere ancora nel susseguente di n; allora essa è vera per tutti i numeri ».

Non si può negare che questo giudizio è in sè più complesso di ognuno dei rimanenti α), β), γ): ma più ancora se ne distingue a motivo di quella forma insolita (e, direi quasi, un po' troppo suggestiva) che lo riveste; onde avverrà bene spesso che mal si adatti a menti poco avvezze all' analisi, o che vi s'imprima in maniera meno perspicua. Nè forse si scosterebbe dal vero, chi attribuisse a tale impronta speciale la prima origine di qualche ingenua discussione a cui dette luogo, e tuttavia porge argomento. Viene dunque a proposito il considerare, se sia possibile togliere in luogo di esso principio δ) qualche altro assioma un po' più spedito e più liscio. E si può infatti, senza andar molto lontano: purchè si conceda facoltà di alterare con δ) anche i due postulati β) e γ) — lasciando α) intatto — come ora diremo.

§ 2. Invece dei quattro principî α),... δ) noi proponiamo il seguente sistema:

I) *Esiste almeno un numero.*

II) Il susseguente d' un numero è un numero.

III) *Due numeri, nessuno dei quali sia susseguente di un numero, son sempre uguali fra loro.*

IV) *In qualsivoglia classe non illusoria di numeri esiste almeno un numero, che non è susseguente di alcun numero della classe.*

Le prpszioni *II*) e *III*) non differiscono dalle α) ed *e*). L'assioma γ) resta implicato immediatamente dai nuovi principî *I*) e *IV*). *Il IV* è quello, da cui dipende massimamente la verità di δ) (§ 3); e può quindi aversi come un surrogato del principio *d'induzione*. Ma, s'io non m'inganno, questo giudizio esistenziale IV) è preferibile a δ) come più facile e piano: e non parlo dell' evidenza; perchè si tratta insomma della comune notizia, che fra i numeri (interi, positivi o nulli) d'una classe effettivamente esistente ce ne dev' esser qualcuno che non sia maggiore di nessun altro. — Di esso è conseguenza immediata il fatto che:

g) « Nessun numero è susseguente di sè medesimo. » O, in

altri termini: « Qualunque sia il numero n, i due numeri n e suc n (*) sono diversi fra loro. »

Lo « zero » sarà qui definito come al § 1 (f); posto che sono vere anche qui le prpsz.[i] γ) ed e).

§ 3. Si dimostra, che il principio d' induzione completa è conseguenza dei nuovi postulati *I)*,... *IV)*.

« Se s è una classe, alla quale appartenga 1) lo zero e 2) il susseguente di ciascun numero che spetti ad s; allora qualunque numero è un s. » Invero, dicasi u la classe dei numeri, che non appartengono ad s: proveremo che una tal classe è vuota o illusoria. Dall'ipotesi che esistan degli u (vale a dire che u non sia classe illusoria) e dall'assioma *IV)*, si dedurrebbe, che deve esistere in u qualche numero x, il quale non sia susseguente di un numero spettante ad u. Un si fatto numero x sarà certamente diverso da zero; poi che — grazie all' ipts. 1) — lo zero non appartiene ad u. Dunque esso ammette un antecedente y (tale cioè che $x = \text{suc}\, y$): poi che, in forza di *III)* e di f), qualunque numero, pur che diverso da zero, sempre sussegue ad un numero. Ora un tal numero y, in quanto escluso da u, dovrà appartenere ad s: per la qual cosa il suo susseguente x — grazie all' ipts. 2) — sarà contenuto in s, e quindi escluso da u. Pertanto l' ipts. fatta che esistan degli u, genera questa illazione assurda: esiste un numero x il quale appartiene e non appartiene ad u.

§ 4. La prpsz β) — da cui risulta, che la trasformazione di ciascun numero nel susseguente (implicata dell'assioma II) è conversiva o reciproca — discende ancor' essa dai nuovi principii I),... IV). Per dimostrarla, potremmo dare come acquisita la nozione di '*somma* di due numeri interi' e la relazione 'è *maggiore di...*'; in quanto si stabiliscono con noti metodi su fatti già postulati ovver dimostrati ai §§ 2,3, e *senza appellarsi a* β): ma non dispiaccia se si richiamano per sommi capi le deduzioni opportune, tanto che basti a rimuovere qualsiasi dubbio in proposito.

(*) « Suc » sta per « susseguente di »

Premesso che (ass. II):

$$1 = \text{suc}\,0\ ,\ 2 = \text{suc}\,1,\ 3 = \text{suc}\,2, 4 = \text{suc}\,3, \ldots\ldots,$$

e (qualunque sia il numero *n*) $n + 1 = \text{suc}\,n$; porremo, essendo x un numero qualsivoglia:
$\text{suc}^1 x = \text{suc}\,x$, $\text{suc}^2 x = \text{suc}(\text{suc}^1 x)$, $\text{suc}^3 x = \text{suc}(\text{suc}^2 x)$,.. ; e (nell' ipts. che $\text{suc}^n x$ sia un numero): $\text{suc}^{n+1} x = \text{suc}(\text{suc}^n x)$; onde sarà definito per induzione (§ 3) l' 'n^{esimo} *seguente*' o '*seguente di* n^{esimo} *ordine*' del numero x (ass. II). La locuzione 'seguente x' senz'altro è per denotare i seguenti di qualsivoglia ordine; e il medesimo significato spetta alla frase '*maggiore di* x'. Di qui — sempre in grazia di δ) — si trae facilmente che:

h) « Se y è un seguente di x e z un seguente di y, sarà z un seguente di x » (vale a dire che, essendo m un numero arbitrario, l' m^{esimo} seguente dell' n^{esimo} seguente di x è ancora un seguente di x). Indi si proverà che

i) « Non si può dare ad un tempo, che y sia un seguente x ed x un seguente y »: atteso che queste due cose involgerebbero — giusta il teorema preced. — che x fosse un seguente di x, contro *g)* e IV)

Per concludere che i nostri principii I),.., IV) sono atti a definire un ordine (aperto) di successione nella classe dei numeri interi assoluti, resta sol da vedere che:

k) « Di due numeri, pur che diversi fra loro, uno è per certo seguente dell' altro » O, in altri termini, che « Se x, y sono numeri, delle tre cose l'una: o y è uguale ad x, o y è maggiore di x, o x è maggiore di y ». Il fatto è vero, se $y = 0$: atteso che $0 = 0$, e che dal supporre $n > 0$ consegue, qualunque sia il numero n, che $n + 1 > 0$ *(h)*; ond'è forza concludere che qualsivoglia numero x sia maggiore od eguale allo zero (§ 3). Ma posto che il fatto abbia luogo per y eguale ad un numero m, si deduce (qualunque sia m) che deve sussistere ancora, se $y = m + 1$; perchè dalle ipotesi $x = m$, $x > m$, $m > x$ consegue rispettivamente $m + 1 > x$, $x \geq m + 1$, $m + 1 > x$ *(h)*. Dunque è vero, qualunque sia y (§ 3).

§ 5. Or si supponga che i numeri a e b, quantunque diversi

fra loro, abbiano entrambi per susseguente un medesimo numero c (necessariamente diverso da quelli, grazie a g). Uno dei numeri a e b sarà certamente maggiore (seguente) dell' altro (k). Ma dal supporre $b > a$, cioè che b sia un seguente di a (§ 4) si deduce che il numero b, in quanto è diverso dal susseguente di a dovrebbe essere al certo un seguente del susseguente di a (§ 4), vale a dire un seguente di c; mentre è c un seguente di b: assurdo (i). Similmente l' ipts. $a > b$ farebb'essere a un seguente di c, mentre è c un seguente di a. Quindi è forza concluder, che $a = b$ (k).

I fatti allegati a questa dimostrazione (§ 4) son tutte cose fondamentali, di cui l'Aritmetica non può passarsi in niun modo: onde sarà manifesto, che il nuovo sistema di pstl. I),... IV) non implica, rispetto a quelli già noti, alcuna maggiore difficoltà deduttiva o didattica.

A confermare l' equivalenza delle prpsz. I),... IV) da una parte e delle α),... δ) dall' altra resta che si deduca la IV) dalle α),... δ): ma ciò si lascia al Lettore.

§ 6. Che i pstl. I),... IV) siano *indipendenti* gli uni dagli altri, si prova per noti esempii.

1. Tolto $N_0 \equiv \Lambda$ (*), sussisteranno le prpsz II), III) e IV), ma sarà falsa la I).

2) Se $a \sim = b$, $N_0 \equiv \iota a$, $\text{suc}a \equiv b$, sono vere le I), III) e IV), mentre non è soddisfatta la II).

3) Per N_0 s' intenda la classe dei numeri interi 0,1,2,3,.... ; ma pongasi $\text{suc}x \equiv x + 2$, qualunque sia il numero x. Si troverà che son vere le prpsz.i I), II), IV); ed errata la III), in quanto esistono allora *due* numeri 0 e 1 non susseguenti di alcuno.

4) Facciasi $N_0 \equiv \iota a$ e $\text{suc}a \equiv a$. Risultano verificate le I), II), III) e infirmata la IV).

(*) N_0 è la classe dei numeri interi, positivi o nulli.

Catania, dicembre 1907.

(*Ricevuta il 10 gennaio 1908*).

FREM. STAB. GALÀTOLA - CATANIA

BIBLIOTECA DELLE FACOLTA' DI LETTERE E FILOSOFIA
TORINO